Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 15, No 2. Marzo – Agosto 2015. ISSN 1659 -0643

Algunas reflexiones en torno a los números irracionales

Mario de León Urbina
mariosdleon88@gmail.com

Recibido: Febrero 3, 2014 Aceptado: Setiembre 1, 2014

Resumen. El conjunto de los números irracionales es un tema de especial interés, debido a que se encuentra en el Programa de Estudios de Matemática de educación secundaria costarricense. Conocer algunos resultados permitirá a los docentes de Enseñanza de la Matemática reflexionar sobre este conjunto y las representaciones que se hacen, tanto del conjunto como de sus elementos, y así aportar herramientas para la reflexión y la búsqueda de estrategias metodológicas, con el fin de lograr una enseñanza óptima de este tema.

Palabras clave: Número pi, números reales, Educación Matemática.

Abstract. The set of irrational numbers is a topic of special interest, because it is mentioned in the curriculum of secondary education mathematics of Costa Rica. Understanding some results, will equip teachers to reflect about this set and the representations that are made, both the set and its elements, and thus provide tools for reflection and the search for methodological strategies in order to achieve optimal teaching on this topic.

KeyWords: Pi number, real numbers, Math Education.

1.1 Introducción

Los números irracionales son números reales. Siguiendo a [2, p. 221], los números reales pueden ser construidos tanto como clases de equivalencia de sucesiones de números racionales que sean de

Cauchy o vía cortaduras de Dedekind, construcciones que a veces se olvidan cuando se utiliza instrumentalmente a los números reales para poder adentrarse en conceptos tales como sucesión, límite, derivación, integración, series, y otros que son vitales en el Análisis Real.

El conjunto de los números reales es un campo totalmente ordenado, es simbolizado con $\mathbb{R}$. Es un conjunto con cardinalidad infinita y no es contable, es completo y cumple la propiedad arquimediana. El conjunto de los números racionales se simboliza con $\mathbb{Q}$, es totalmente ordenado, es denso en $\mathbb{R}$, tiene cardinalidad infinita y es contable (o enumerable), no es completo y cumple la propiedad arquimediana (estas propiedades y sus pruebas pueden ser consultadas en el capítulo 1 de [10]). La descripción anterior es lo que se puede llamar una *caracterización* de los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$.

Quien enseña el tema de los números reales deberá tener presente que, la proposición

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

posee un profundo significado, debido a que ese conjunto de números racionales simbolizado en esa proposición no es el mismo que el que se ha utilizado, tanto en la construcción de los números reales vía sucesiones de Cauchy como corolariotaduras de Dedekind. A groso modo: un número irracional tiene como base de su construcción a los números racionales y el concepto de infinito.

1.1.1 Números irracionales históricos

Un número irracional que atrajo el interés de los matemáticos occidentales fue π. Menciona [6, p. 104] que Arquímedes (287 a.C. - 212 a.C.) acotó π por el método geométrico de exhaución de la siguiente manera:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

La irracionalidad de π fue probada por Lambert en 1761 y la de e^{π} fue probada parcialmente por Gelfond en 1929. En 1882 Lindemann probó la trascendencia de π.

Tal fue el interés por π que aquí se tienen algunas igualdades y aproximaciones que lo involucran:

- Vieta (1579): $\dfrac{2}{\pi} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{2}}}} \cdots$
- Wallis (1655): $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \dfrac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \dfrac{6 \cdot 5}{5 \cdot 7} \cdots \dfrac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} \cdots$
- Newton (1665): $\dfrac{\pi}{6} \approx \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{1}{128}$
- Weierstrass (1841): $\pi := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

- Ramanujan (1910): $\dfrac{1}{\pi} = \dfrac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$.
- Los hermanos Chudnovsky (2009):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+\frac{3}{2}}}.$$

También π fue aproximado como $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y como $\sqrt{10}$. Parafraseando a [3, pp. 30-31] se tiene la historia de otro número irracional: $\sqrt{2}$. Éste número fue conocido antes de Euclides. Hipaso, un pitagórico que vivió alrededor del siglo V a. C., utilizó métodos geométricos para demostrar la irracionalidad de $\sqrt{2}$. La leyenda cuenta que fue lanzado al mar por dicho descubrimiento. De acuerdo con Platón (Teeteto 147d), la irracionalidad de $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}$ y $\sqrt{17}$ fueron probadas por Teodoro de Cirene (el lector interesado en los métodos utilizados por Teodoro puede consultar en [5], pp. 42-43).

Y se puede seguir dando otros ejemplos de números irracionales:

- Constante de Ërdos-Borwein (mencionado en [11]):

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} = 1{,}606695152415291763\ldots$$

- Constante de Liouville: $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$.
- Número de Champernowne: $C_{10} = 0{,}12345678910111213141516171819202 1\ldots$

1.1.2 Números algebraicos y trascendentes

Definición 1.1

Un número real es *algebraico* si es solución de una ecuación algebraica:

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0,$$

con $c_i \in \mathbb{Q}$ e $i \in \{1,2,3,\ldots,n\} \subset \mathbb{N}$. Un número real es *trascendente* si no es solución de una ecuación algebraica.

Con estas definiciones, los números reales se pueden clasificar de dos formas (según [9]):

1. Números racionales (todos son algebraicos) y números irracionales (algebraicos y trascendentes);
2. Números algebraicos (racionales o irracionales) y números trascendentes (todos son irracionales).

Cada número trascendente es irracional. El sétimo problema de Hilbert se enunciaba de la siguiente manera:

¿Es a^b trascendente siendo $a \neq 0, 1$ algebraico y b irracional algebraico?

La respuesta parcial fue dada por Gelfond en el año 1934. Algunos ejemplares de números trascendentes son:

- $2^{\sqrt{2}}$, la constante de Gelfond-Schneider, y $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$;
- e^{π}, constante de Gelfond. Dado que $(-1)^{-i} = (e^{i\pi})^{-i} = e^{\pi}$.

Con el número π ya se tiene un motivo para abordar la historia que lo rodea, de la incesante búsqueda de una expresión que lo determine, que lo haga explícito. Lo mismo se pudo notar con algunas constantes antes mencionadas. Pero, ¿qué resultados pueden asegurar que un número real es, también, irracional? Recuérdese la definición siguiente, sobre número irracional: "es un número que no puede ser expresado como una fracción $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros y n es diferente de cero", lo cual es equivalente a decir que un número irracional es cualquier número real que no es racional. ¿Podrá un estudiante determinar, por ejemplo con dicha definición, que π, e y $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ son números reales racionales o irracionales?

Las aproximaciones decimales dadas por una calculadora no son dignos representantes de ningún número irracional, y esto ha sido caricaturizado por [4, p. 5] con el diálogo entre Bob y Alicia, en el cual Bob asegura que su calculadora, con una probabilidad de equivocación mínima, le ayudará a determinar qué número es racional o irracional.

La principal motivación de este artículo se encuentra en el trabajo final de graduación de Chinchilla et al [1, pp. 232], los cuales concluyeron que

> El concepto de número irracional es difícil. Por tanto requiere que el docente tenga conciencia de esa dificultad y brinde a los estudiantes recursos que les permitan aprender este concepto.

En el Programa de Estudio ([7, pp. 297-298]) se hace énfasis en la prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y algunas representaciones geométricas de números irracionales. Aquí se expondrán resultados, la mayoría con sus pruebas, excepto aquellas que demandan un grado de dificultad mayor o son demasiado extensos. En ellos se hace hincapié en la no contabilidad del conjunto de los números irracionales, en la densidad que tiene en $\mathbb{R}$, en las representaciones decimales y radicales. Si bien es cierto que las representaciones geométricas son importantes, aquí no se ha mencionado más que la recta numérica. Tampoco se hará énfasis en la representación con fracciones continuas.

1.2 El dominio irracional de la recta numérica

Si se lanzara un dardo para anclarlo en la recta numérica, la probabilidad de que este dardo acierte un número racional es nula, por tanto, es un hecho probable que dará en un blanco irracional. Para explicar esto se habla de conjuntos de medida cero.

Definición 1.2

Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ se dice que tiene *medida cero* si es posible recubrirlo con intervalos, de tal manera que la suma de todas las longitudes de esos intervalos tienda a 0.

Así, por ejemplo, el conjunto de los números naturales tiene medida cero, porque, dado $\varepsilon > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, los intervalos de la forma $]n - \frac{\varepsilon}{2^n}, n + \frac{\varepsilon}{2^n}[$ lo contienen todos juntos. Si sumamos todas las longitudes de dichos intervalos:

$$\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} + \ldots = 2\varepsilon$$

y se puede hacer ε arbitrariamente pequeño, teniendo así la condición de que la suma de los intervalos que lo recubren tienda a 0.

Un conjunto es *contable* (o *enumerable*) si puede ponerse en corolariorespondencia biunívoca con $\mathbb{N}$. El resultado siguiente afirma que $\mathbb{Q}$ es un conjunto contable.

Teorema 1.1

El conjunto de los números racionales es contable.

Demostración: Se asume que el máximo común divisor entre los enteros $\{h_i, k_i\} = 1$, para cada $i \in \mathbb{N}$, esto con el fin de evitar duplicaciones. Se establece un principio en dos condiciones. Se dice que $\dfrac{h_1}{k_1}$ "precede" a $\dfrac{h_2}{k_2}$ si cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

(a) $h_1 + k_1 < h_2 + k_2$

(b) $h_1 + k_1 = h_2 + k_2$ y $h_1 < h_2$.

Por medio de este principio se ordenan los racionales positivos como sigue:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{5}{1}, \cdots$$

Dicha secuencia puede ser puesta en corolariorespondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales. Los racionales negativos se pueden incrustar en la secuencia y también el cero.

El Teorema 1 dice que, aunque sea infinito el número de elementos de $\mathbb{Q}$, éste conjunto puede ser contado. Que un conjunto sea contable implica que tenga medida cero. Esto lo dice el siguiente teorema.

Teorema 1.2

Todo subconjunto real, contable, tiene medida cero.

Demostración. Sea $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$. Sea $\varepsilon > 0$. Se construyen intervalos de longitud $\dfrac{\varepsilon}{2^{n-1}}$ para cada s_n, con $n \in \mathbb{N}$, los cuales son de la forma $\left]s_n - \dfrac{\varepsilon}{2^n}, s_n + \dfrac{\varepsilon}{2^n}\right[$. La suma de esas longitudes cumple lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} = \varepsilon \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 2\varepsilon$$

lo cual tiende a 0 cuando $\varepsilon \to 0$. Se concluye que S tiene medida cero.

El corolario siguiente establece que $\mathbb{Q}$ es un conjunto de medida cero:

Corolario 1.1

$\mathbb{Q}$ tiene medida cero.

Demostración. Basta aplicarle el Teorema 2 a $\mathbb{Q}$, puesto que es contable, debido al Teorema 1.

El resultado siguiente menciona que el complemento de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ no es un conjunto contable.

Teorema 1.3

El conjunto de los números irracionales no es contable. Más aún: $\mathbb{R}$ no es contable.

Demostración. Supongase, por contradicción, que el conjunto de los números irracionales es contable y se ordena en una secuencia cuyos elementos son $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Por el Teorema 1, el conjunto de los números racionales es contable. Se ponen en orden los elementos racionales así: $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$. Se forma la nueva secuencia $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con las dos secuencias y superponiéndolas de tal forma que

$$\rho_n = \begin{cases} \alpha_n & \text{si } n \text{ es impar} \\ \rho_n & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Entonces $\mathbb{R}$ debe ser contable y, por el Teorema 1.2, tiene medida cero. Sin embargo esto implica que toda la recta real puede ser cubierta por intervalos de longitud arbitrariamente pequeña, lo cual es una contradicción.

El Teorema 1.2 muestra que la incontabilidad del conjunto de los números reales se debe a la incontabilidad de los números irracionales. La metáfora del dardo y la cuestión de probabilidad y medida cero se exponen de manera sencilla en [12].

1.3 Densidad

En los libros de texto de secundaria, al tratar el tema de conjunto de números reales, se habla de la *densidad*.

Definición 1.3

En la recta real, se dice que $S \subseteq \mathbb{R}$ es *denso* en un intervalo si, dados α, β reales (s.p.g. $\alpha < \beta$), $\exists s \in S : \alpha < s < \beta$.

La densidad de un conjunto en otro es la "omnipresencia" del primero en el segundo. Así, la omnipresencia de los racionales y de los irracionales se prueba con el siguiente resultado.

Teorema 1.4

El conjunto de los números racionales es denso en conjunto de los números reales. Similarmente, el conjunto de los números irracionales es denso en el conjunto de los números reales.

Demostración.. Se eligen α y β cualesquiera, reales, tales que $\alpha < \beta$. Por la propiedad arquimediana de los números reales, existe un natural n tal que $n(\beta - \alpha) > 1$, es decir, $\beta - \alpha > \frac{1}{n}$. Se elige m entero que satisfaga

$$m < n\beta \leq m + 1$$

De lo anterior se desprende que

$$\alpha < \beta - \frac{1}{n} \leq \frac{m+1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

y

$$\frac{m}{n} < \beta.$$

$\frac{m}{n}$ es el racional buscado.

Para obtener un irracional entre α y β, se usa nuevamente la propiedad arquimediana para escoger k natural tal que

$$k\left(\beta - \frac{m}{n}\right) > \sqrt{2} \Longleftrightarrow \beta > \frac{m}{n} + \frac{\sqrt{2}}{k},$$

y como se tiene que

$$\alpha < \frac{m}{n} \Longleftrightarrow \alpha < \frac{m}{n} + \frac{\sqrt{2}}{k},$$

así el irracional buscado es $\frac{m}{n} + \frac{\sqrt{2}}{k}$, porque satisface

$$\beta > \frac{m}{n} + \frac{\sqrt{2}}{k} > \alpha. \quad \blacksquare$$

1.4 La explicación del porqué de la representación decimal

Los números irracionales usualmente se han "definido" a partir de su representación en expansión decimal. ¿De dónde procede la representación decimal? He aquí un teorema que evidencia que la representación decimal es sólo un caso particular de representación.

Teorema 1.5

Sean $a_1, a_2, \ldots$ una secuencia de enteros positivos, todos mayores que 1. Entonces cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ es expresado de forma única por

$$\alpha = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{a_1 a_2 \ldots a_i},$$

con enteros c_i tales que $0 \leq c_i \leq a_i - 1$ para todo $i \geq 1$ y $c_i < a_i - 1$ para una cantidad infinita de c_i.

Debido a la dificultad y extensión de la prueba de este teorema (requiere conocimiento de series convergentes y cálculos ingeniosos), se invita al lector a que la pueda consultar detalladamente en [8, pp. 7-10], en donde además se destaca que dicho teorema fue propuesto por Georg Cantor.

Por tanto, la expansión decimal de un número real se da al tomar $a_k = 10$, para todo $k = 1, 2, \ldots, i$:

$$\alpha = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^i} = c_0, c_1 c_2 \ldots$$

Aquí debe hacerse hincapié en que la representación en expansión decimal no es única, debido a que, por ejemplo, $1 = 0{,}99999999999999999\ldots$. Sin embargo, tal como lo dice [8, pp. 10], ésto puede ser evitado porque la condición del Teorema 1.4 en la que $c_i < a_i - 1$ para un número infinito de c_i's, que en este caso sería $c_i < 9$ para infinitos c_i's.

1.5 Buscando números irracionales

Los resultados siguientes mostrarán qué números reales son irracionales, con toda certeza. Se comienza con la prueba de que e (el número de Napier o Neper) es irracional. Se asume que $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$, para todo n natural.

Algunas reflexiones en torno a los números irracionales . Mario de León Urbina
Derechos Reservados © 2015 Revista digital Matemática, Educación e Internet (http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/)

Teorema 1.6

e es irracional.

Demostración.: Supóngase, por contradicción, que e es racional, es decir, $e = \frac{h}{k}$, con h y k enteros positivos. Considérese el número entero

$$N = k!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \ldots - \frac{1}{k!}\right)$$

el cuál cumple lo siguiente:

$$k!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \ldots - \frac{1}{k!}\right) = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \ldots$$

$$< \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^i} = \frac{1}{k} \leq 1$$

lo cual es una contradicción, pues dicho entero cumpliría $0 < N < 1$.Por lo tanto, e es irracional.

El siguiente teorema, cuya demostración completa la podremos encontrar en [8] (y que debido a su extensión remitimos a la referencia), hace conexión entre expansiones decimales y conjuntos numéricos.

Teorema 1.7

Un $\alpha \in \mathbb{R}$ posee expansión decimal periódica si y sólo si es racional.

El Teorema 1.5 establece que un número irracional no tiene una expansión decimal periódica. La palabra infinito no se agrega aquí, pues, toda expansión decimal finita es periódica, con una "cola" de ceros, por ejemplo: $0{,}5 = 0{,}500000000\ldots$

El teorema siguiente permite caracterizar a ciertos números irracionales, por medio de una ecuación polinómica con coeficientes enteros.

Teorema 1.8

Si $x \in \mathbb{R}$ satisface

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0, \text{ (*)}$$

con $c_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$, entonces x es entero o irracional.

Demostración.: Supóngase que $x = \frac{a}{b}$, con a, b enteros y $b > 0$ (a y b primos relativos), es solución de la ecuación (*). Entonces se tiene que

$$a^n = -b\left(c_1 a^{n-1} + c_2 a^{n-2} b + \ldots + c_n b^{n-1}\right)$$

Si $b > 1$ entonces cualquier divisor primo de b debe dividir a a^n y como consecuencia de Teorema Fundamental de la Aritmética, p deberá dividir a a. Pero esto contradice el supuesto de que a y b son primos relativos. Por tanto, $b = 1$, lo cual establece que x, si es racional, entonces es entero.

En la prueba del Teorema 1.5 se han utilizado argumentos de divisibilidad de los números enteros, y se debe considerar el resultado siguiente: que si $p = m \cdot n$ (con $p \neq 0$), entonces cualquiere divisor primo de m y n es divisor de p. Y en el caso de la prueba se debe ver de la siguiente manera: $a^n = -b \cdot M$, con

$$M = c_1 a^{n-1} + c_2 a^{n-2} b + \ldots + c_n b^{n-1}.$$

Como consecuencia del Teorema 1.5, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 1.2

Si m es entero positivo el cual no es $n-$potencia de un entero, entonces $\sqrt[n]{m}$ es irracional.

Demostración.: Basta hacer, en la ecuación (*) del Teorema 1.5 que todos los c_i, con $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\} \subset \mathbb{N}$ sean nulos y analizar la ecuación

$$x^n + c_n = 0.$$

El corolario 1.5 asegura que $\sqrt{2}$ es irracional, pues es consecuencia de aplicar el Teorema 1.5 a la ecuación $x^2 - 2 = 0$. Más general aún, se deben considerar las ecuaciones del tipo $x^n - m = 0$ y así justificar las irracionalidades de Teodoro, vistas en la introducción, por ejemplo.

Se desearía encontrar más números irracionales, debido a la cardinalidad que este conjunto posee. Sin embargo esto no parece fácil. ¿Cómo determinar cuándo un número real es irracional o no? Ya se ha visto un par de teoremas para dicha determinación, pero a continuación se tienen otros que pueden ampliar la búsqueda.

Teorema 1.9

Para cualquier $r \neq 0, r \in \mathbb{Q}$, $\cos r$ es irracional.

En el caso anterior, se habla de valores del dominio expresados en radianes, pues se podría argumentar que $\operatorname{sen}(60)$ es racional sin ésta condición. La prueba completa se puede encontrar en [8], debido al uso de técnicas del cálculo integral y a su extensión. Como consecuencia de este teorema se tienen los resultados siguientes.

Corolario 1.3

π es irracional.

Demostración.: Por el Teorema 1.5, si π fuera racional, entonces $\cos\pi$ sería irracional, pero se sabe que $\cos\pi = -1$. Por lo tanto, π es irracional.

Como consecuencia del Teorema 1.5, se tiene que las funciones trigonométricas sen y tan, en sus dominios de definición, pueden dar imágenes irracionales siendo las preimágenes de escogidas, números racionales.

Corolario 1.4

Las funciones trigonométricas sen y tan son irracionales en todo $r \neq 0, r \in \mathbb{Q}$, en sus dominios de definición.

Demostración.: Si sen $r \in \mathbb{Q}$, entonces (utilizando identidades trigonométricas)

$$1 - 2\ \text{sen}^2 r = \cos 2r \in \mathbb{Q} \quad (\rightarrow\leftarrow)$$

Similarmente, si $\tan r \in \mathbb{Q}$,

$$\cos 2r = \frac{1-\tan^2 r}{1+\tan^2 r} \in \mathbb{Q} \quad (\rightarrow\leftarrow)$$

Corolario 1.5

Cualquier función trigonométrica inversa, a excepción de casos en los cuales 0 es preimagen, es irracional para $r \in \mathbb{Q}$.

Demostración. $\arccos r = \rho \in \mathbb{Q} \ \Leftrightarrow\ \cos\rho = r \in \mathbb{Q}.\ \ (\rightarrow\leftarrow)$.

El Teorema 1.5 y los Corolarios 1.3, 1.5 y 1.5 aseguran que cos 60, π, sen 1 y arctan 10 son números irracionales, por mencionar casos particulares. El Teorema 15 se presentan sin prueba, pues es igual de difícil que la prueba del Teorema 1.5 (por tanto se invita a revisar su prueba en [8, pp. 22-24]. Y son resultados necesarios, pues afirman que senh 10, y ln 7 son números irracionales.

Teorema 1.10

Las funciones hiperbólicas son irracionales para $r \neq 0, r \in \mathbb{Q}$.

Teorema 1.11

Si $r \neq 0, r \in \mathbb{Q}$, e^r es irracional. También $\log r, r \neq 1$ es irracional.

Demostración. $e^r \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow\ e^{-r} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{e^r + e^{-r}}{2} \in \mathbb{Q} = \cosh r.\ \ (\rightarrow\leftarrow)$.

Se termina esta sección con un resultado que permitirá obtener más números irracionales, haciendo uso de los resultados vistos en ésta sección.

Teorema 1.12

Sea α irracional y r cualquier racional distinto de cero. Entonces $\alpha \pm r$, αr, αr^{-1} y $\alpha^{-1}r$ son irracionales. Como conclusión se tiene que $-\alpha$ y α^{-1} son irracionales.

Demostración.: La prueba de cada una es una copia al carbón de, por ejemplo, $\alpha + r = s$, suponiendo que s es racional y concluyendo que α es racional, lo cual es una contradicción.

1.6 Reflexiones

La contribución de este documento es que el y la docente de Matemática de Educación Secundaria reflexione sobre ciertos resultados concernientes al conjunto de los números irracionales y que son de suma importancia para comprender la naturaleza del conjunto, sus características y el reconocimiento de algunos de sus elementos, de manera explícita, para que se supere un poco la limitante en el aprendizaje de la definición de número irracional al utilizar la calculadora en la clase, los ejemplos de los libros de texto o el mismo docente, que podría no saber a qué resultados acudir cuando se ve en la necesidad de dar casos particulares de irracionales a sus estudiantes. Lo más importante es que por medio de los resultados haga una reflexión de sus conceptos y definiciones acerca de los números irracionales, por tanto, un análisis de la metodología empleada para enseñarlos.

En los libros de texto para educación secundaria suele mencionarse como "irracionales famosos" a π, e y Φ (el número áureo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$), sin hacer distinción siquiera de las diferencias que existen entre ellos (aunque en este artículo sólo se ha hecho una mención superficial de los números algebraicos y trascendentes), y dejando de lado otros ejemplos asequibles de números irracionales. La definición anterior equipara a los números irracionales, tanto así que π y $\sqrt{2}$ son esencialmente "de la misma especie", siendo el primero trascendente y el segundo algebraico. Esto invita al análisis de la definición siguiente de número irracional:

> "*número irracional es aquel que posee una expansión decimal infinita* **no** *periódica*"

el cuál es el Teorema 1.5 mencionado en éste artículo.

El conjunto de los números irracionales es fascinante, debido a que posee la potencia del continuo pero sus elementos no pueden ser dados de forma explícita, en su infinita mayoría. Los teoremas mencionados en este artículo permiten accesar a una pequeña parcela del vasto universo de los irracionales, a pesar de su difícil existencia explícita. Sin embargo, aún existen números reales de los cuales no se sabe si pertenecen al mundo de la racionalidad o de la irracionalidad, tal como lo es la constante de Euler-Mascheroni: $\gamma = \int_1^\infty \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx$. Al menos se tiene la satisfacción de que, en este bosque denso e infinito de irracionales, algunos teoremas y corolarios sirven de focos para iluminar tan vasta oscuridad.

Bibliografía

[1] Chinchilla, J.; Robles, C.; Rodríguez, A.; Villalobos, D. *Análisis de diferentes problemas históricos de las matemáticas que proporcionan el concepto de número irracional*. Trabajo final de graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática, Universidad de Costa Rica, 2012.

[2] Dineen, S. *Analisys. A Gateway to understranding mathematics*, World Scientific, 2012.

[3] Ebbinghaus, H.; Hermes, H.; Hirzebruch, F.; Koecher, M.; Mainzer, K.; Neukirch, J.; Prestel, A.; Remmert, R. *Numbers*. Springer. 1991.

[4] Fuchs, D.; Tabachnikov, S. *Mathematical Omnubus. Thirty lectures on classic Mathematics*, AMS, 2007.

[5] Hardy, G.; Wright, E. *An introduction to the theory of numbers*, Oxford, 1975.

[6] Le Lionnais, F. *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, EUDEBA, Buenos Aires, 1972.

[7] Ministerio de Educación Pública. *Programa de estudios*, San José, 2012.

[8] Niven, I. *Irrational numbers*, MAA, 1967.

[9] Niven, I. *Numbers: rational and irrational*, Yale, 1961.

[10] Vatsa, B. S. *Principles of mathematical analysis*, CBS Publishers, India, 2002.

[11] Weisstein, Eric W. "Irrational Number." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. `http://mathworld.wolfram.com/IrrationalNumber.html` (consultada el 29 de enero, 2014).

[12] "Probabilty of picking an irrational number". `http://math.stackexchange.com/questions/218716/probabilty-of-picking-an-irrational-number.` Consultado el 18 de mayo de 2014.